第3.5章 恒定电流的电场

恒定电流状态下产生
- 恒定电场 → 本章
- 恒定磁场 → 下一章

恒定电流场仍满足静电场方程。

电流
- 传导电流 → 导电介质中
- 运流电流 → 真空中

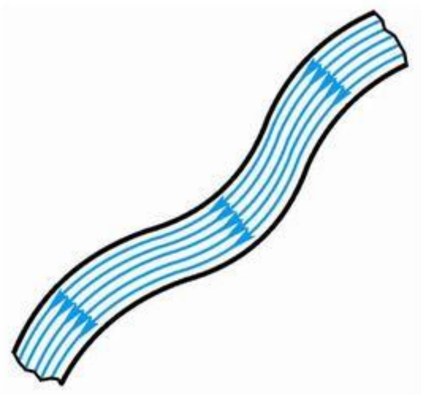
本章目录：

§ 3.5.1 恒定电流场的一般规律

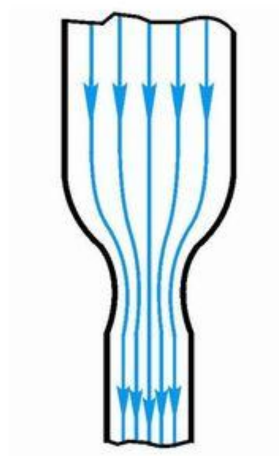
§ 3.5.2 导电介质中的恒定电流场

第3.5章 恒定电流的电场

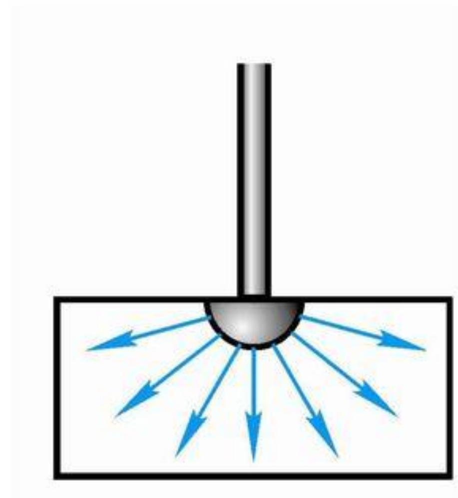
几种典型的电流分布



粗细均匀的
金属导体



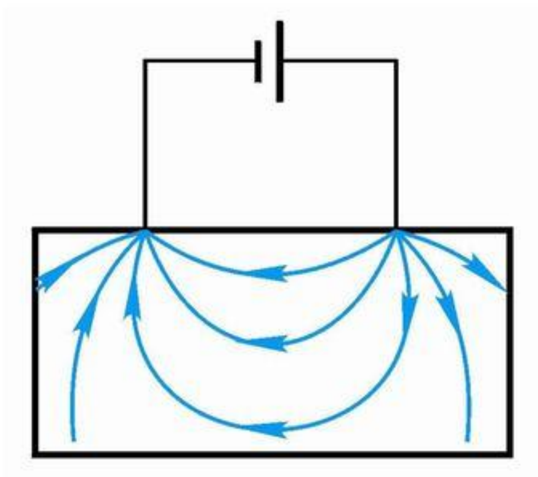
粗细不均匀
的金属导线



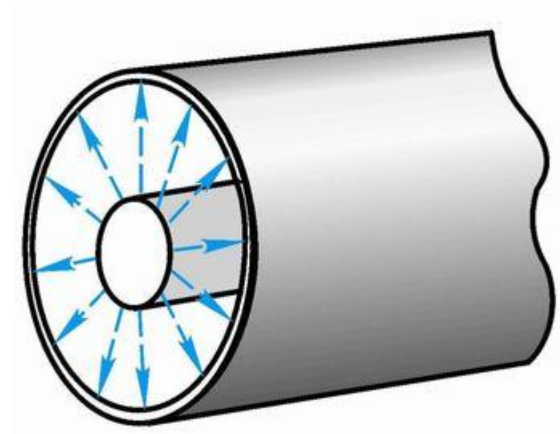
半球形接地电
极附近的电流

第3.5章 恒定电流的电场

几种典型的电流分布



电阻法勘探矿
藏时的电流



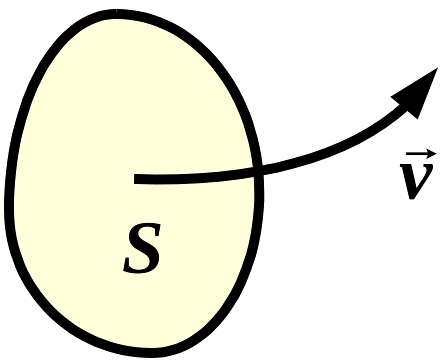
同轴电缆中
的漏电流

§ 3.5.1 恒定电流场的一般规律

一、电流与电流密度

① **体电流 I**：其大小定义为单位时间通过某一曲面的电荷量。电流为一标量，规定正电荷的运动方向电流为正。

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$



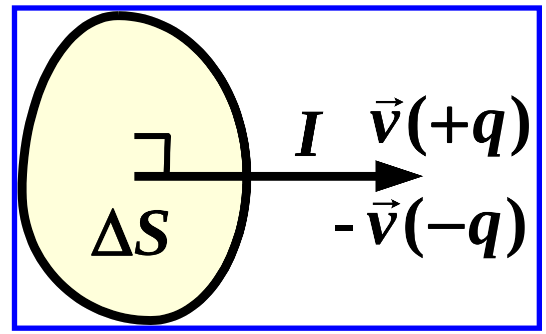
单位：安培（A）

§ 3.5.1 恒定电场的一般规律

体电流密度$\vec{J}$：

方向： 为该点的正电荷运动方向（即电流方向）；

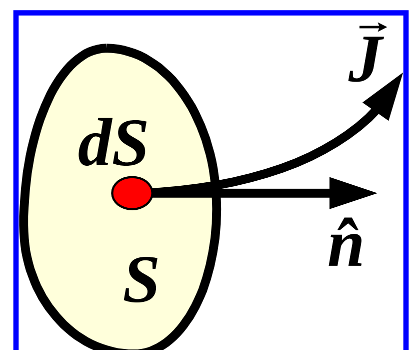
大小： 为垂直于该点电流方向单位面积通过的电流（也即单位时间通过垂直于该点电流方向单位面积的电荷量）。



$$\left|\vec{J}\right| = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} = \frac{dI}{dS}$$

单位：安培/米^2（A/m^2）

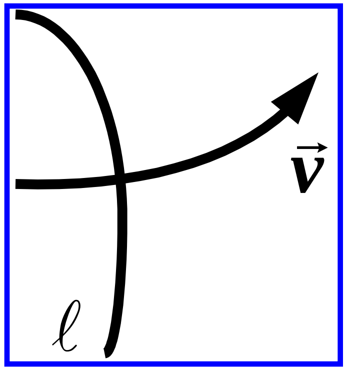
体电流与体电流密度的关系：



$$I = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

② 面电流 I_s：单位时间通过某一曲线的电荷量

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

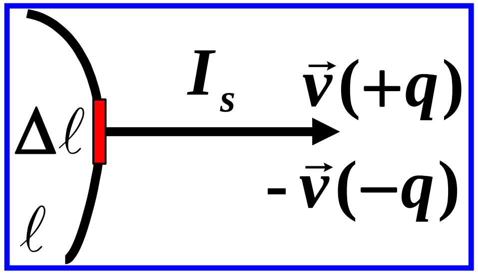


面电流密度 $\vec{J}_s$：

方向：正电荷运动方向（电流方向）

大小：通过垂直于该点电流方向单位长度的电流（也即单位时间通过垂直于该点电流方向单位长度的电荷量）。

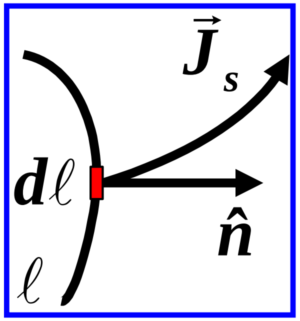
$$\left|\vec{J}_s\right| = \lim_{\Delta \ell \to 0} \frac{\Delta I_s}{\Delta \ell} = \frac{dI_s}{d\ell}$$



单位：安培/米（A/m）

面电流 I_s 与面电流密度 $\vec{J}_s$ 的关系：

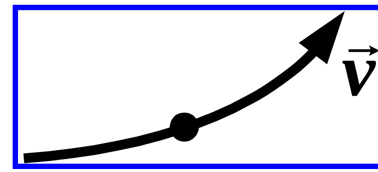
$$I_s = \int_\ell \vec{J}_s \cdot \hat{n}\, d\ell$$



§ 3.5.1 恒定电场的一般规律

③ 线电流 I_ℓ： 单位时间通过某点的电荷量。

无法再定义电流密度。根据需要，借助 δ 函数，可表为体或面电流密度。



④ 电流密度与电荷密度及其运动速度的关系

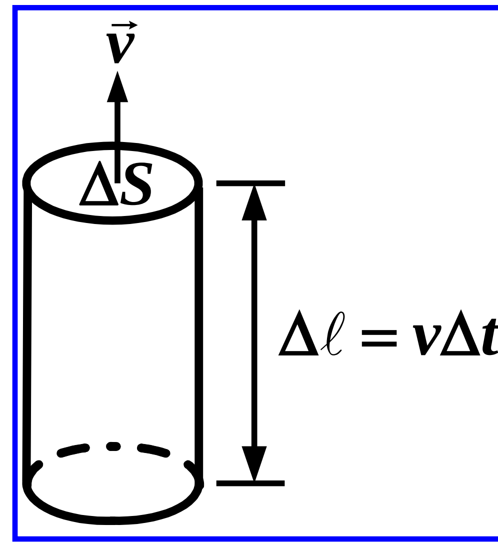
$\vec{J}$ $\qquad$ ρ_v $\qquad$ $\vec{v}$

对某一类运动电荷：

$$\Delta q = \Delta\ell \Delta S \rho_v = v \Delta t \Delta S \rho_v$$

$$\Delta I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \rho_v v \Delta S$$

$$\left|\vec{J}\right| = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} = \rho_v v \longrightarrow \boxed{\vec{J} = \rho_v \vec{v}}$$



§ 3.5.1 恒定电场的一般规律

若存在若干不同类运动电荷：

$$\vec{J}=\sum_i \rho_{v_i}\vec{v}_i,\quad \vec{J}_s=\sum_i \rho_{sv_i}\vec{v}_i,\quad I_\ell=\sum_i \rho_{\ell v_i}v_i$$

二、电荷守恒定律

电荷既不能产生，也不能消失，只能从一处运动到另一处。

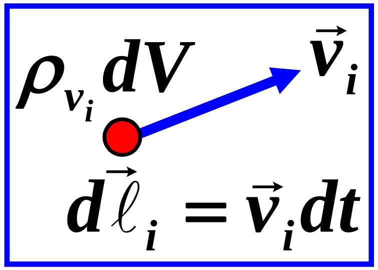
$$\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}=-\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV$$

$$\nabla\cdot\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

电荷守恒定律（普适定律）

三、焦耳定律

电荷在电场中运动时，电场力对运动电荷做功。焦耳定律描述电场力对运动所作的功。



电场力所作的功：

对第 i 类电荷：$dW_i = \rho_{v_i} dV \vec{E} \cdot d\vec{\ell}_i = \rho_{v_i} \vec{E} \cdot \vec{v}_i dtdV$

对所有类电荷：$dW = \sum_i dW_i = \vec{E} \cdot \sum_i \rho_{v_i} \vec{v}_i dtdV = \vec{E} \cdot \vec{J} dtdV$

电场力单位时间所作的功即功率：$dP = \dfrac{dW}{dt} = \vec{E} \cdot \vec{J} dV$

$$\frac{dP}{dV} = \vec{E} \cdot \vec{J}$$

$$P = \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV$$

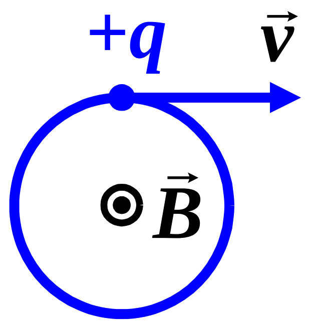
焦耳定律（普适定律）

dP/dV 称为功率密度，代表单位时间内对单位体积内运动电荷所作的功。

四、恒定电流场的基本特点

① 由连续分布的运动电荷产生。

例：电荷在均匀磁场作用下作圆周运动。若（A）电荷数量较多或（B）电荷运动速度非常快，运动一周的时间可忽略，则可认为是连续分布。



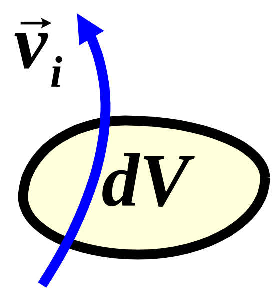
$\vec{B} = B_0\hat{z}$

② 在相同运动轨道上每一类运动电荷的速度大小不随时间变化。

③ （每一类）运动电荷分布不随时间变化。

dt 时间内流入 dV 的电荷量等于流出 dV 的电荷量（动态平衡状态）

$$\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t} = 0$$

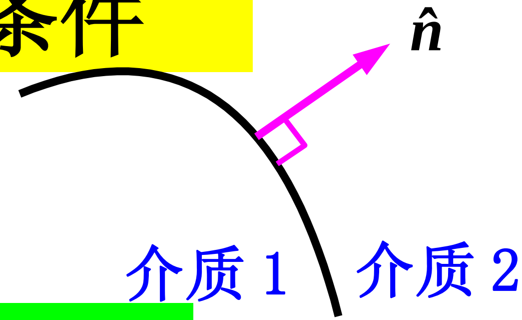


dt 时间内

④ 电场不随时间变化。

§ 3.5.1 恒定电流场的一般规律

五、恒定电流场的基本方程及边界条件

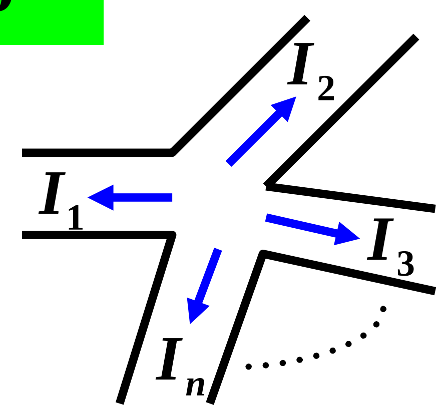


用静电场方程描述。

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{J} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_f \\ \oint_\ell \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \\ \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_{sf} \\ \hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \\ \hat{n} \cdot (\vec{J}_2 - \vec{J}_1) = 0 \end{cases} \qquad \vec{E} = -\nabla \varphi$$

Kirchhoff 电流定律:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} I_i = 0$$



即对任何节点，流出节点的支路电流的代数和为零。

§ 3.5.2 导电介质中的恒定电流场

导电介质/非理想介质/有损介质：

介质中有可自由运动电荷 $\xrightarrow{\text{运动}}$ 传导电流

一、传导电流的欧姆定律

对线性、各向同性导电介质，有

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

称为欧姆定律的微分形式或导电介质的本构关系。

σ —— 电导率，单位：西门子/米（S/m）。

理想介质：$\sigma = 0$。

理想导体：$\sigma \to \infty$。$\vec{J}$ 有限 $\longrightarrow$ $\vec{E} = 0$

§ 3.5.2 导电介质中的恒定电流场

橡胶：$\sigma \sim 10^{-15}$S/m，$\varepsilon_r = 2.3 - 4.0$，可视为理想介质。

水：$\sigma \sim 10^{-2}$-10^{-4}S/m，$\varepsilon_r = 81$。

海水：σ=3-5S/m。

金属导体：$\varepsilon_r \approx 1$

银：$\sigma=6.17\times10^{7}$S/m；铜：$\sigma=5.80\times10^{7}$S/m

金：$\sigma=4.10\times10^{7}$S/m；铝：$\sigma=3.82\times10^{7}$S/m

铁：$\sigma=1.03\times10^{7}$S/m

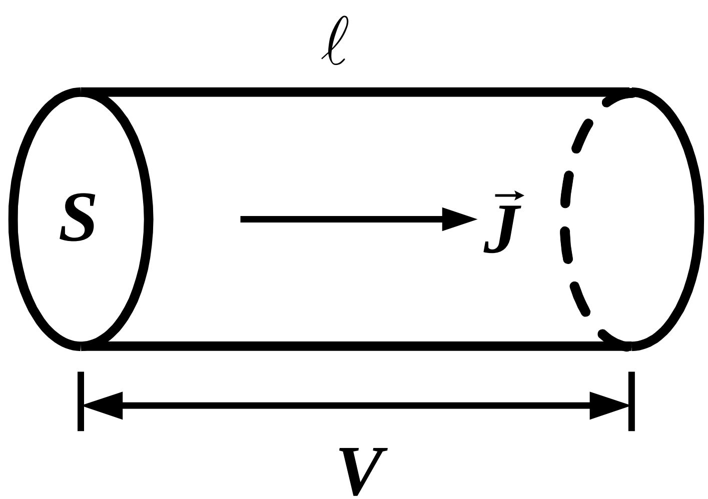
可视为理想导体。

注：超导不属于本章所定义的理想导体。

§ 3.5.2 导电介质中的恒定电流场

横截面形状任意的直（柱形）导电介质的电阻：

对称性、均匀性分析。



$$J = \frac{I}{S}$$

$$E = \frac{J}{\sigma} = \frac{I}{S\sigma}$$

$$V = E\ell = \frac{I\ell}{S\sigma} = RI$$ —— 欧姆定律的积分形式

$$R = \frac{\ell}{S\sigma}$$ —— 电阻

例：圆柱形导线，半径 1mm，长 1m，计算电阻。

铜：0.00549Ω；铝：0.00833Ω。

§ 3.5.2 导电介质中的恒定电流场

二、维持导电介质中恒定电流须有非静电起源的外力

导电介质中：

① 电场力对作宏观自由运动的电荷作功。

$$\sigma \neq 0, \infty 时, \quad \frac{dP}{dV} = \vec{J} \cdot \vec{E} = \sigma \left| \vec{E} \right|^2 > 0$$

例：直导电介质

$$P = JEV = \frac{I}{S} \frac{I}{S\sigma} S\ell = I^2 \frac{\ell}{S\sigma} = I^2 R$$

代表单位时间内消耗在电阻上的热能。

§ 3.5.2 导电介质中的恒定电流场

② 电荷运动过程中与微观结构中的原子/分子发生碰撞，从而将能量（动能）转化为热能。恒定电流之所以能保持，也是因为有这样能量消耗。恒定电流状态下电场力所作的功必须全部转换为热能。

③ 恒定电流场的电荷分布和场不随时间变化，因而其总能量也不随时间变化。

仅靠静电场力，不可能①②③同时得以维持，必须有非静电场力 $\vec{F}_{外}$ 来补充能量的消耗。

§ 3.5.2 导电介质中的恒定电流场

$\vec{F}_{外}$ 可用其等效电场强度$\vec{E}_{外}$。

定义: $\vec{E}_{外} = \vec{F}_{外} / q$

在外力存在的地方（如电池内部），欧姆定律可推广为:

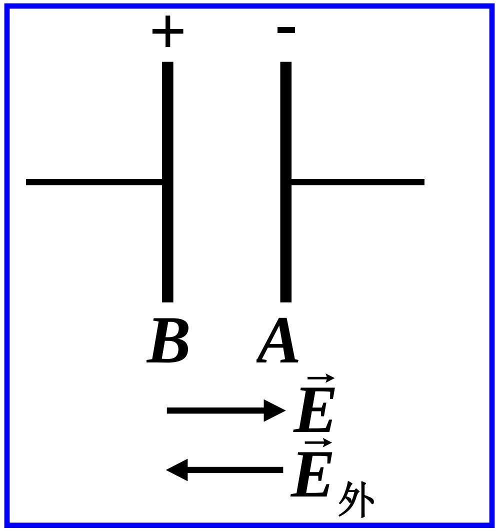
$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{外})$$

备注:

- $\vec{E}_{外}$ 并非真正的电场强度。它代表非静电起源的外力的作用。仅在产生电流这一点上，$\vec{E}_{外}$ 可与真正的电场强度等效。除此之外，与真正的电场强度截然不同。例如，它并不满足静电场方程。
- $\vec{E}_{外}$ 仅在电源内部存在。

电源电动势定义：将单位实验电荷从负极通过电源内部移到正极时，非静电外力所作的功。

$$\varepsilon=\int_A^B \vec{E}_{外}\cdot d\vec{\ell}$$



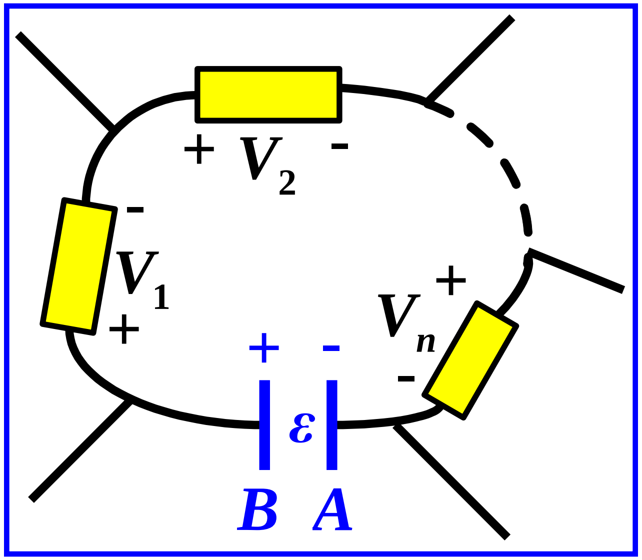
理想电压源： 电源内部，$\sigma\to\infty$。

$$\vec{J}\text{有限} \longrightarrow \vec{E}+\vec{E}_{外}=0 \longrightarrow \vec{E}=-\vec{E}_{外}$$

$$\oint_\ell \vec{E}\cdot d\vec{\ell}=0 \longrightarrow \sum_{i=1}^{n}V_i+\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}=0$$

$$\longrightarrow \sum_{i=1}^{n}V_i=-\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}=\int_A^B \vec{E}_{外}\cdot d\vec{\ell}=\varepsilon$$

—— **Kirchhoff 电压定律**



即理想电压源端电压等于其电动势。

非理想电压源=理想电压源+内阻

§ 3.5.2 导电介质中的恒定电流场

三、导电介质中恒定电流场基本方程与边界条件

介质均匀，线性，各向同性

1、基本方程:

设$\sigma \neq 0$

$$\left.\begin{aligned} &\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \rho_f / \varepsilon \\ &\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad \Rightarrow \nabla \cdot (\sigma \vec{E}) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot (\vec{E}) = 0 \\ &\nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\nabla \varphi \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} &\rho_f = 0 \\ &\nabla^2 \varphi = 0 \end{aligned}\right.$$

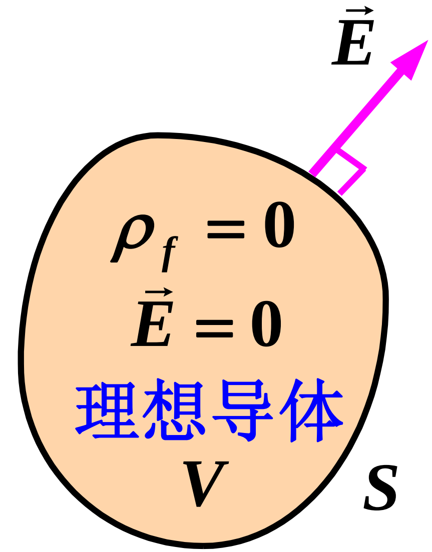
即在介质内部满足 Laplace 方程。

2、边界条件：

理想导体： $\sigma \to \infty$。

$\vec{J}$有限 $\longrightarrow \vec{E} = 0$

即只有理想导体才是等位体。而在没有电荷运动的静电场中，只要是导体，静电平衡状态下均有这样的性质。



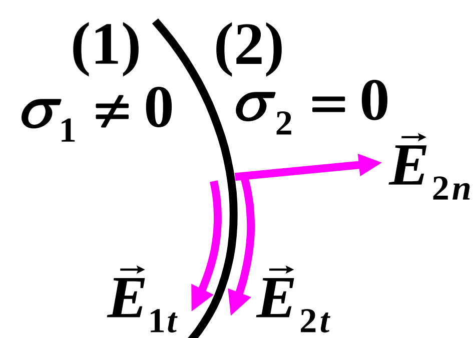
一般情况：

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_{sf}$$

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \longrightarrow \varphi_1 = \varphi_2$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{J}_2 - \vec{J}_1) = 0 \longrightarrow \sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$$

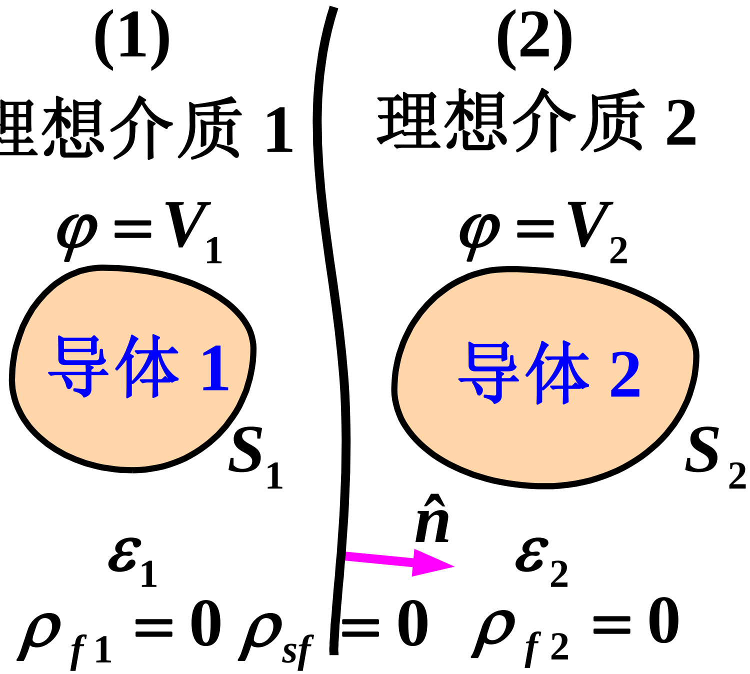
特别，若介质 2 为理想介质：



$\sigma_2 = 0$，$\sigma_1 \neq 0$，则 $\hat{n} \cdot \vec{E}_1 = 0$ 或 $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial n} = 0$

四、恒定电流场与静电场的对偶性

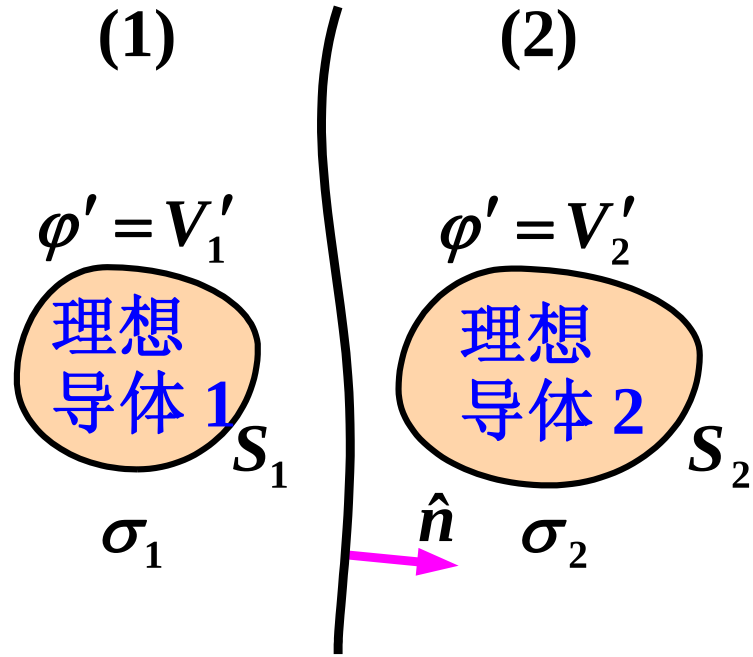
静电场 $\rho_f = 0$



$$\varphi_1 = \varphi_2$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$$

恒定电流场（电源外）



$$\varphi_1' = \varphi_2'$$

$$\sigma_1 \frac{\partial \varphi_1'}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial \varphi_2'}{\partial n}$$

如$V_1 = V_1'$，$V_2 = V_2'$，$\varepsilon_1 = \sigma_1$，$\varepsilon_2 = \sigma_2$

$$\Longrightarrow \quad \varphi = \varphi', \ \vec{E} = \vec{E}', \ \vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \sigma \vec{E}' = \vec{J}'$$

两种场所满足的基本方程和重要关系式

静电场 $(\rho_f = 0)$	恒定电流场（电源外）
$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{E} = -\nabla \varphi$	$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{E} = -\nabla \varphi$
$\nabla \cdot \vec{D} = 0$	$\nabla \cdot \vec{J} = 0$
$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$	$\vec{J} = \sigma \vec{E}$
$\nabla^2 \varphi = 0$	$\nabla^2 \varphi = 0$
$\oint_S \vec{D} \cdot dS = Q$	$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$
$E_{1t} = E_{2t} \quad D_{1n} = D_{2n}$	$E_{1t} = E_{2t} \quad J_{1n} = J_{2n}$

两种场对应物理量

静电场 $(\rho_f = 0)$	$\vec{E}$	φ	$\vec{D}$	Q	ε	C
恒定电流场（电源外）	$\vec{E}$	φ	$\vec{J}$	I	σ	G

§ 3.5.2 导电介质中的恒定电场

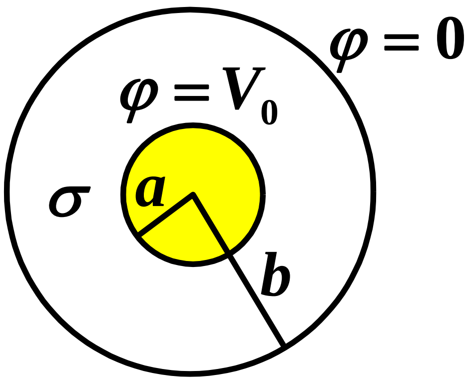
$$Q_1 = \oint_{S_1} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_1} \vec{J}' \cdot d\vec{S} = I_1'$$

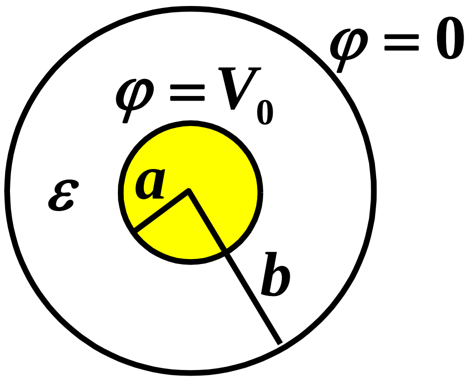
$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{I_1'}{V_1' - V_2'} = G$$

二个问题中，只要其中一个问题的解已知，则可由上述对偶性直接得到另一个问题的解。

§ 3.5.2 导电介质中的恒定电场

例：求球形电容器的电位 φ 和漏电导 G。





$$\varphi = \frac{V_0 ab}{b-a}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right)$$

$$C = 4\pi\varepsilon\frac{V_0 ab}{b-a}$$

说明：

§3.5.2 导电介质中的恒定电场

五、弛豫时间

静态平衡：平衡状态下没有电荷运动。

动态平衡：平衡状态下虽有电荷运动但电荷分布不随时间变化。

共同特征：$\rho_f = 0$

（线性、均匀、各向同性导电介质）

建立平衡状态需要时间。

弛豫时间反映建立平衡状态所需时间之数量级。

§ 3.5.2 导电介质中的恒定电场

线性、均匀、各向同性导电介质内部：

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E}=\rho_f/\varepsilon \\ \nabla\cdot\vec{J}=\sigma\nabla\cdot\vec{E}=-\dfrac{\partial\rho}{\partial t} \end{cases} \longrightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t}=-\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho_f$$

$$\rho_f(t,\vec{r})=\rho_f(0,\vec{r})e^{-t/\tau}=\rho_{f0}e^{-t/\tau}$$

其中，$\tau=\varepsilon/\sigma$即为弛豫时间。

t/τ	1	2	3	4	5
ρ_f/ρ_{f0}	0.368	0.135	0.050	0.018	0.007

铜：$\sigma=5.8\times10^{7}\,\mathrm{S/m},\ \varepsilon_{\mathrm{r}}=1,\quad \tau=1.5\times10^{-19}$秒

橡胶：$\sigma=10^{-15}\,\mathrm{S/m},\ \varepsilon_{\mathrm{r}}=\underline{2.3}-4.0$ ，$\tau=5.65$小时

§ 3.5.2 导电介质中的恒定电场

六、导电介质中恒定电场的求解方法

① $\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_f$

线性均匀各向同性导电介质：

$$\rho_f = 0 \Rightarrow \nabla\cdot\vec{D} = 0 \Rightarrow \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = 0$$

$\int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = I$

$$\nabla\cdot\vec{J} = 0 \Rightarrow \oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = 0$$

② 解方程

③ 利用电阻的串并联

④ 利用对偶性

例：球形电容器，求$\varphi, \vec{E}, \vec{J}, G$。

$$① \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_f \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q_f}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r}$$

$$\varphi - \varphi_b = \int_r^b \vec{E}\cdot d\vec{r} = \frac{Q_f}{4\pi\varepsilon r} - \frac{Q_f}{4\pi\varepsilon b}$$

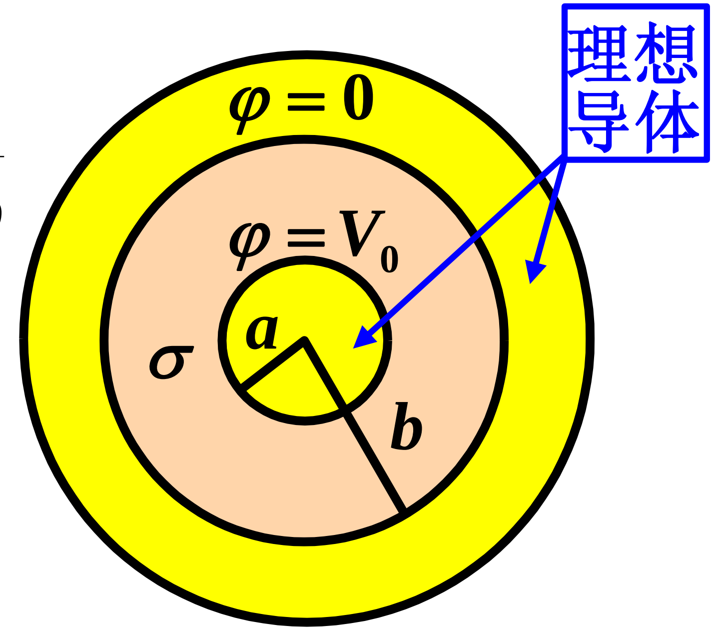
$$r = a, \varphi = V_0 \Rightarrow Q_f = \ldots$$

$$\varphi = \frac{ab}{b-a}V_0\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right)$$

$$\vec{E} = \ldots,\ \vec{J} = \sigma\vec{E} = \ldots$$

$$I = \oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = \frac{4\pi\sigma ab V_0}{b-a}$$

$$G = \frac{I}{V_0} = \frac{4\pi\sigma ab}{b-a}$$



$$\nabla\cdot\vec{J} = 0$$

§ 3.5.2 导电介质中的恒定电场

② $\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = I \Rightarrow \vec{J} = \dfrac{I}{4\pi r^2}\hat{r}$

$$\vec{E} = \vec{J}/\sigma$$

$$\varphi - \varphi_b = \int_r^b \vec{E}\cdot d\vec{r} = \frac{I}{4\pi\sigma r} - \frac{I}{4\pi\sigma b}$$

$$r = a, \varphi = V_0 \Rightarrow I = \ldots \Rightarrow \varphi, \vec{E}, \vec{J}, G = \ldots$$

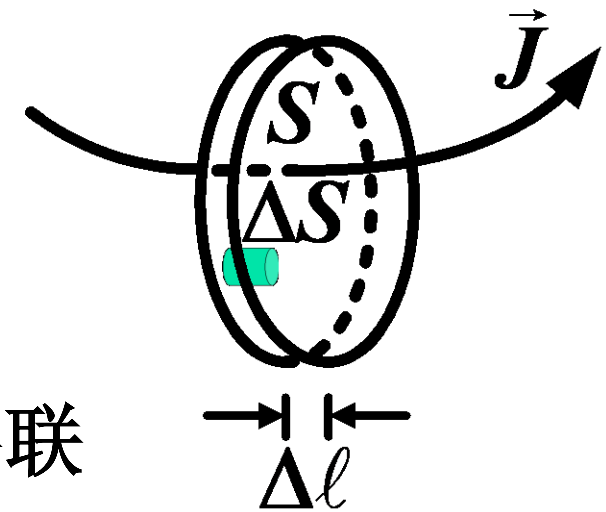
③ $\nabla^2\varphi = 0$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{c_1}{r} + c_2$$

…

例：若均匀导电介质相邻两等位面之间的距离处处相等，则$R=\dfrac{1}{\sigma}\displaystyle\int_\ell \dfrac{d\ell}{S}$。其中，积分沿电流方向，$S$ 为垂直于电流方向的等位面的面积。

$$-\Delta\varphi=\Delta R\Delta I=\frac{\Delta\ell}{\sigma\Delta S}\Delta I$$



$$\Delta I=(-\Delta\varphi)\frac{\sigma\Delta S}{\Delta\ell}$$

求和或积分：$I=(-\Delta\varphi)\dfrac{\sigma S}{\Delta\ell}$ —— 并联

$$-\Delta\varphi=\frac{\Delta\ell I}{\sigma S}$$

求和或积分：$V=\dfrac{I}{\sigma}\displaystyle\int_\ell \dfrac{d\ell}{S}$ —— 串联

例：对任意横截面形状的柱形导电介质，证明：$R=\dfrac{\ell}{\sigma S}$

① 由边界上电力线方向，可设：$\vec{E}=E_z\hat{z}$

$$\int_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\int_S \vec{E}\cdot\hat{z}dS=\int_S E_z dS=\text{常数} \Rightarrow E_z \text{ 与 } z \text{ 无关}$$

相邻两等位面之间的电位降：

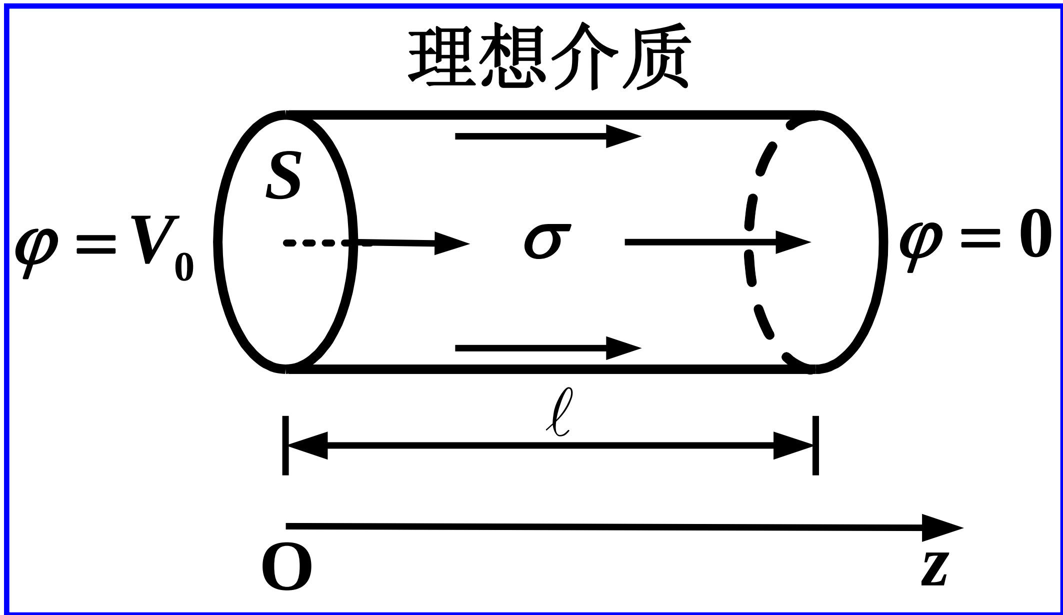
$$-d\varphi=\vec{E}\cdot d\vec{\ell}=\vec{E}\cdot dz\hat{z}=E_z dz$$

$$-\int_z^{\ell} d\varphi=\varphi-\varphi_{\ell}=\int_z^{\ell} E_z dz=E_z(\ell-z)$$

$$z=0,\varphi=V_0 \Rightarrow E_z=\frac{V_0}{\ell}$$

$$\varphi=V_0(\ell-z)/\ell$$

- 与静电场中平板电容器的场比较。
- 对偶性？



§ 3.5.2 导电介质中的恒定电场

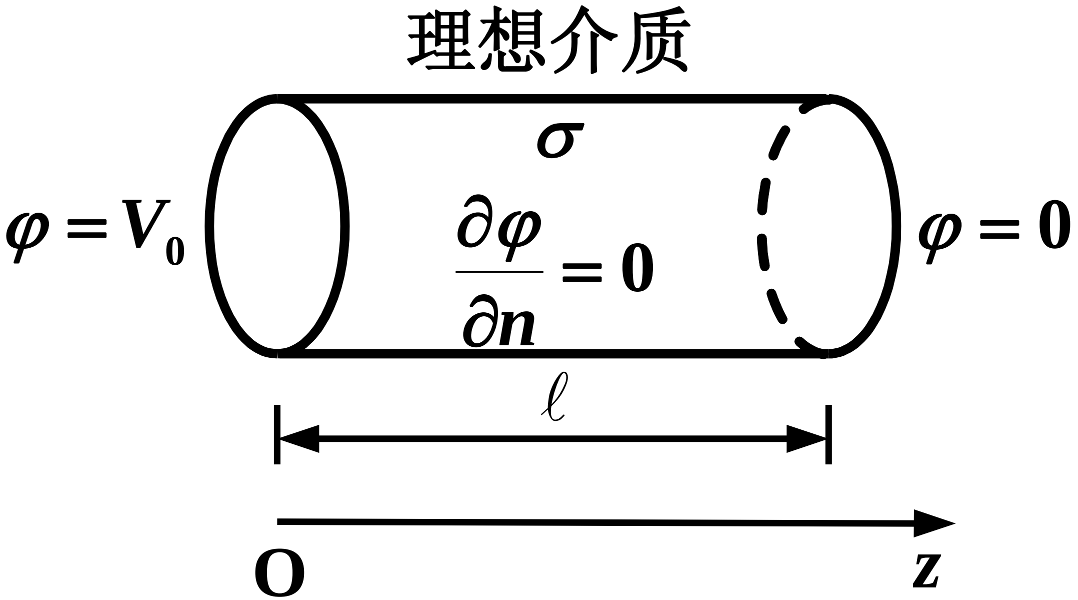
② $\nabla^2\varphi = 0$

由边界条件，

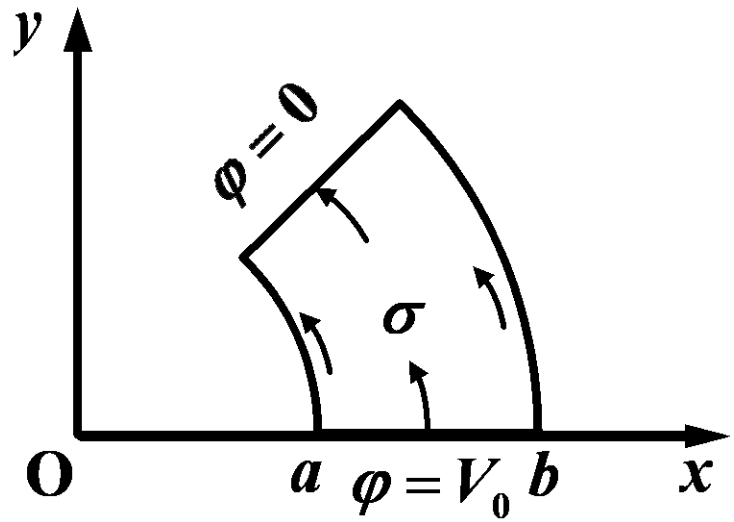
可设：$\varphi = \varphi(z)$

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0$$

$$\varphi = A(\ell - z) + B$$



例：求电位和电导。

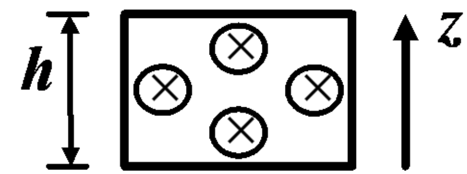


① 由边界上电力线方向，

可设$\vec{E} = E_\theta \hat{\theta}$

等位面：$\theta =$ 常数

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{E} \cdot \hat{\theta} dS = \int_S E_\theta dS = \text{常数}$$



$\Rightarrow$ E_θ与 θ 无关

相邻两等位面之间的电位降：

$$-d\varphi = \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \vec{E} \cdot r d\theta \hat{\theta} = E_\theta r d\theta$$

$$-\int_\theta^{\theta_0} d\varphi = \varphi - \varphi_{\theta_0} = \int_\theta^{\theta_0} E_\theta r d\theta = E_\theta r(\theta_0 - \theta)$$

$$\theta = 0, \varphi = V_0 \Rightarrow E_\theta = V_0 / (r\theta_0)$$

$$\varphi = V_0(\theta_0 - \theta) / \theta_0$$

§ 3.5.2 导电介质中的恒定电场

$$J_\theta = \sigma E_\theta = \ldots$$

$$I = \int_S J_\theta dS = \int_0^h \int_a^b \frac{\sigma V_0}{r\theta_0} drdz = V_0 \frac{\sigma h}{\theta_0} \ell n \frac{b}{a}$$

$$G = \frac{I}{V_0} = \frac{\sigma h}{\theta_0} \ell n \frac{b}{a}$$

② $\nabla^2 \varphi = 0$

由边界条件，可设：$\varphi = \varphi(\theta)$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d^2 \varphi}{d\theta^2} = 0$$

$$\varphi = A(\theta_0 - \theta) + B$$

§ 3.5.2 导电介质中的恒定电场

③ 利用串并联法求电阻。

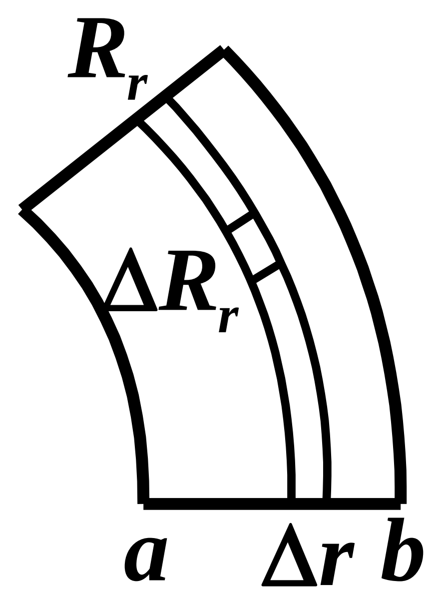
（3-1）

串联：$\Delta R_r = \dfrac{r\Delta\theta}{\sigma h\Delta r}$

$$R_r = \int_0^{\theta_0} \frac{r d\theta}{\sigma h\Delta r} = \frac{r\theta_0}{\sigma h\Delta r}$$

并联：$G_r = \dfrac{\sigma h\Delta r}{r\theta_0}$

$$G = \int_a^b \frac{\sigma h dr}{r\theta_0} = \frac{\sigma h}{\theta_0}\ell n\frac{b}{a}$$



§ 3.5.2 导电介质中的恒定电场

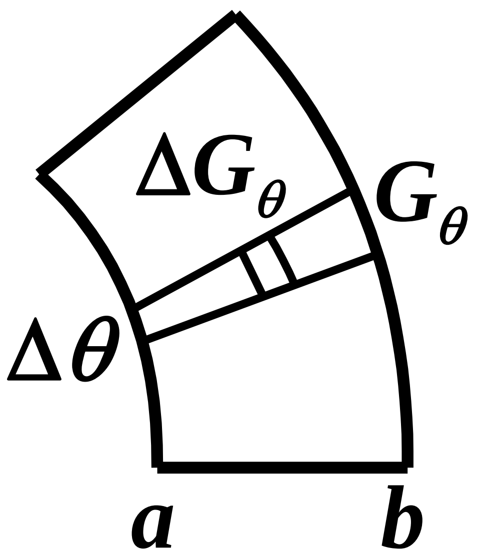
（3-2）

并联：$\Delta G_\theta = \dfrac{\sigma h \Delta r}{r \Delta \theta}$

$$G_\theta = \int_a^b \frac{\sigma h dr}{r\Delta\theta} = \frac{\sigma h}{\Delta\theta} \ell n \frac{b}{a}$$

串联：$R_\theta = \dfrac{\Delta\theta}{\sigma h \ell n \dfrac{b}{a}}$

$$R = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sigma h \ell n \dfrac{b}{a}} = \frac{\theta_0}{\sigma h \ell n \dfrac{b}{a}}$$



本章总结

1、恒定电场的特征：动态平衡，虽有电荷运动。但电荷分布不随时间变化，从而产生的电场也不随时间变化。因此，恒定电场仍属于静电场范畴。

2、维持导电介质中的恒定电场必须有非静电外力，以补充能量的消耗。

3、虽然恒定电场满足的物理规律与电荷静止的静电场相同，但是导电介质在恒定电场中的行为却与它在电荷静止的静电场中的行为大不相同。例如：在电荷静止的静电场中，静电平衡时，整个导体为等电位体；而在恒定电场中，只有理想导体才具有这一特性。